

07-02 Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème

Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \quad \text{avec :}$$

k un entier naturel non nul.

$p_1, p_2, \dots, p_k$ des nombres premiers distincts rangés en ordre croissant.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ des entiers naturels non nuls.

Remarque

Ce théorème, appelé **Théorème fondamental de l'arithmétique** s'énonce parfois ainsi :

Tout entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon, à l'ordre près des facteurs.

La notion de produit est étendue à des « produits » de 1 nombre et même de 0 nombre. Dans ce dernier cas, on parle de **produit vide** qui, par convention vaut 1. De la même façon, on a $2^0 = 1$ ou encore $0! = 1$.

Ainsi, le nombre 1 est le « produit » de zéro nombre premier.

Exemples

$$28 = 2^2 \times 7$$

$$997 = 997$$

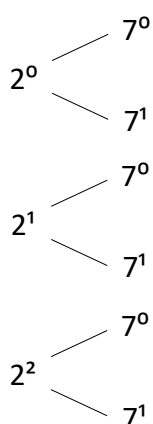
$$2\,681\,800 = 2^3 \times 5^2 \times 11 \times 23 \times 53$$

Méthode

Utiliser la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers et un arbre permet de trouver l'ensemble de ses diviseurs.

Diviseurs de 28 :

1
7
2
14
4
28



07-02 Applications du cours**Application 1**

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers et préciser combien ils ont de diviseurs.

a] 80

b] 16 766

c] 756

Application 2

Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers pour déterminer le plus grand diviseur commun (PGCD) et le plus petit multiple commun (PPCM) de 11 250 et 53 900.

Application 3

Quel est le plus petit entier naturel par lequel on doit multiplier 1224 pour obtenir un cube parfait ?

Application 4

1. Quel est le plus petit entier possédant exactement 28 diviseurs positifs ?
2. Déterminer tous les entiers naturels ayant exactement 6 diviseurs positifs et n'admettant que 5 et 7 comme diviseurs premiers.

Application 5

Leonhard Euler (1707-1783) était un mathématicien et physicien suisse, à l'origine de la notion de fonction.

Soit n un entier naturel non nul.

On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n .

1. Compléter.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(n)$									

2. Confirmer ou infirmer les conjectures suivantes.

a] « Si p est premier alors $\varphi(p) = p - 1$ ».

b] « Si p est premier alors $\varphi(p^2) = p(p - 1)$ ».

